Fierz identity

$n \times n$ 行列全体は n^2 次元のベクトル空間とみなせる

(行列の和，スカラー倍について線型)

→ 任意の行列は n^2 個の基底行列

$$\{ E_\alpha \, , \quad \alpha = 1, \cdots, n^2 \}$$

によって展開できる.

$\{E_\alpha\}$ の完全性を表す式 : Fierz identity

このベクトル空間の内積は

$$(A, B) = \mathrm{tr}\, A^\dagger B \quad = \sum_{i,j} (A^\dagger)_{ji} B_{ij} = \sum_{i,j} A_{ij}^* B_{ij}$$

で定義される。

基底 $\{E_\alpha\}$ がこの内積のもとで正規直交系 → $\mathrm{tr}\, E_\alpha^\dagger E_\beta = \delta_{\alpha\beta}$

一般にそうでない場合 dual な基底 $\{E^\alpha\}$ を

$$\mathrm{tr}\, E^\alpha E_\beta = \delta^\alpha_\beta$$

で定義する.

行列 A を　$A = \sum_{\alpha} C^{\alpha} E_{\alpha}$　と展開したとき

展開係数 C^{α} を求めたい

$$\mathrm{tr}(E^{\alpha}A) = \mathrm{tr}\left(E^{\alpha}\sum_{\beta} C^{\beta}E_{\beta}\right) = \sum_{\beta} C^{\beta}\delta^{\alpha}_{\beta} = C^{\alpha}$$

$$A = \sum_{\alpha} E_{\alpha}\,\mathrm{tr}(E^{\alpha}A)$$

この式は任意の A について成立するので、特に A として

行列単位　$A^{(ij)} = \begin{array}{cc} & j \\ i & \begin{pmatrix} & & \\ & 1 & \\ & & \end{pmatrix} \end{array}$ をとる.

$$A^{(ij)}{}_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$$

$$A^{(ij)}{}_{kl} = \sum_{\alpha} (E_{\alpha})_{kl}\,(E^{\alpha})_{nm}\,A^{(ij)}{}_{mn}$$

$$\delta_{ik}\delta_{jl} = \sum_{\alpha} (E_{\alpha})_{kl}(E^{\alpha})_{ji}$$

$$\sum_{\alpha} (E^{\alpha})_{ij}(E_{\alpha})_{kl} = \delta_{il}\delta_{kj}$$

2×2 行列

$E_\alpha = \{ \tau^a, \mathbb{1} \}$ と選ぶと

$\mathrm{tr}\, \mathbb{1} = 2$
$\mathrm{tr}\, \tau^a = 0$
$\mathrm{tr}\, \tau^a \tau^b = 2\delta^{ab}$

$E^\alpha = \{ \frac{1}{2}\tau^a, \frac{1}{2}\mathbb{1} \}$

$$\frac{1}{2}\sum_a (\tau^a)_{ij}(\tau^a)_{kl} + \frac{1}{2}\delta_{ij}\delta_{kl} = \delta_{il}\delta_{kj}$$

$$(\tau^a)_{ij}(\tau^a)_{kl} = 2\delta_{il}\delta_{kj} - \delta_{ij}\delta_{kl}$$

N×N 行列

$E_\alpha = \{ \lambda^a, \mathbb{1} \}$

λ^a : generalized Gell-Mann matrices $\quad a = 1, \cdots, N^2-1$

$\frac{\lambda^a}{2}$: SU(N) generator

$\mathrm{tr}\,\lambda^a = 0$, $\mathrm{tr}\,\lambda^a\lambda^b = 2\delta^{ab}$, $\mathrm{tr}\,\mathbb{1} = N$

$E^\alpha = \{ \frac{1}{2}\lambda^a, \frac{1}{N}\mathbb{1} \}$

$$\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{N^2-1} (\lambda^a)_{ij}(\lambda^a)_{kl} + \frac{1}{N}\delta_{ij}\delta_{kl} = \delta_{il}\delta_{kj}$$

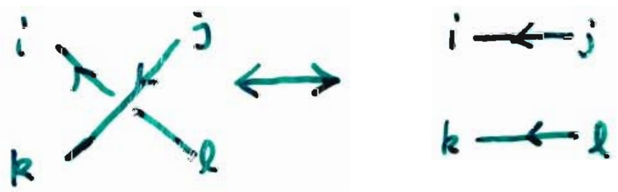
cf. ゲージ理論の 1/N 展開

4×4

$$E_\alpha = \{ 1,\ \gamma_\mu,\ \sigma_{\mu\nu}\ (\mu<\nu),\ \gamma_\mu\gamma_5,\ \gamma_5 \}$$

$$E^\alpha = \frac{1}{4}\{ 1,\ \gamma^\mu,\ \sigma^{\mu\nu}\ (\mu<\nu),\ -\gamma^\mu\gamma_5,\ \gamma_5 \}$$

$$1_{il}\,1_{kj} = \frac{1}{4}\Big\{ 1_{ij}\,1_{kl} + (\gamma^\mu)_{ij}(\gamma_\mu)_{kl} + \frac{1}{2}(\sigma^{\mu\nu})_{ij}(\sigma_{\mu\nu})_{kl} - (\gamma^\mu\gamma_5)_{ij}(\gamma_\mu\gamma_5)_{kl} + (\gamma_5)_{ij}(\gamma_5)_{kl} \Big\}$$



fermion の脚の組み替え

上式に $(\gamma^\lambda)_{i'i}(\gamma_\lambda)_{jj'}$ をかけると

$$(\gamma^\lambda)_{il}(\gamma_\lambda)_{kj} = 1_{ij}\cdot 1_{kl} - \frac{1}{2}\gamma^\mu\cdot\gamma_\mu - \frac{1}{2}\gamma^\mu\gamma_5\cdot\gamma_\mu\gamma_5 - \gamma_5\cdot\gamma_5$$

etc.

$$\gamma^\mu(1+\gamma_5)\cdot\gamma_\mu(1+\gamma_5) = -\gamma^\mu(1+\gamma_5)\cdot\gamma_\mu(1+\gamma_5)$$

$$\gamma^\mu(1-\gamma_5)\cdot\gamma_\mu(1-\gamma_5) = -\gamma^\mu(1-\gamma_5)\cdot\gamma_\mu(1-\gamma_5)$$

$$\gamma^\mu(1+\gamma_5)\cdot\gamma_\mu(1-\gamma_5) = 2(1-\gamma_5)\cdot(1+\gamma_5)$$

$$\bar\psi_1\Gamma\psi_2\,\bar\psi_3\Gamma'\psi_4 = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Fermi統計}}}{-}\sum \bar\psi_1\Gamma''\psi_4\,\bar\psi_3\Gamma'''\psi_2$$

$$\underbrace{\bar\nu_\mu\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\mu\,\bar e\gamma_\alpha(1-\gamma_5)\nu_e}_{\text{CC}} = +\underbrace{\bar\nu_\mu\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\nu_e\,\bar e\gamma_\alpha(1-\gamma_5)\mu}_{\text{NC}}$$