問題（「解析力学と相対論」から）

3 次元極座標のニュートン方程式

ポテンシャルが V で与えられているときのニュートン方程式を極座標で表せ．ただし，極座標への座標変換は

$$x = r\sin\theta\cos\phi \ , \quad y = r\sin\theta\sin\phi \ , \quad z = r\cos\theta \tag{1}$$

で与えられる．

まず，極座標のパラメータへの変化方向の単位ベクトルを次のように定義する．

$$\mathbf{e}_r \equiv \frac{\mathbf{r}}{r} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \ , \quad \mathbf{e}_\theta = \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} \ , \quad \mathbf{e}_\phi = \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\sin\theta\partial\phi} = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

これらは正規直行基底をなす．基底のパラメータによる微分は

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial\theta} = -\mathbf{e}_r \ , \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial\phi} = \cos\theta\mathbf{e}_\phi \ , \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\phi}{\partial\theta} = 0 \ , \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\phi}{\partial\phi} = -\sin\theta\mathbf{e}_r - \cos\theta\mathbf{e}_\theta \tag{3}$$

さらに，パラメータが時間によるとして基底の時間微分を計算すると

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \dot\theta\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial\theta} + \dot\phi\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial\phi} = \dot\theta\mathbf{e}_\theta + \dot\phi\sin\theta\mathbf{e}_\phi \tag{4}$$

$$\dot{\mathbf{e}}_\theta = \dot\theta\frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial\theta} + \dot\phi\frac{\partial \mathbf{e}_\phi}{\partial\phi} = -\dot\theta\mathbf{e}_r + \dot\phi\cos\theta\mathbf{e}_\phi \tag{5}$$

$$\dot{\mathbf{e}}_\phi = \dot\phi\frac{\partial \mathbf{e}_\phi}{\partial\phi} = -\dot\phi(\sin\theta\mathbf{e}_r + \cos\theta\mathbf{e}_\theta) \tag{6}$$

これらを使うと，極座標での位置ベクトルは

$$\mathbf{x} = r\mathbf{e}_r \tag{7}$$

速度ベクトルは

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d}{dt}(r\mathbf{e}_r) = \dot r\mathbf{e}_r + r\dot{\mathbf{e}}_r = \dot r\mathbf{e}_r + r\dot\theta\mathbf{e}_\theta + r\dot\phi\sin\theta\mathbf{e}_\phi \tag{8}$$

加速度ベクトルは

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{x}} &= \frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{x}}) = \frac{d}{dt}(\dot r\mathbf{e}_r + r\dot\theta\mathbf{e}_\theta + r\dot\phi\sin\theta\mathbf{e}_\phi) \\
&= \ddot r\mathbf{e}_r + \dot r(\dot\theta\mathbf{e}_\theta + \dot\phi\sin\theta\mathbf{e}_\phi) \\
&\quad + \dot r\dot\theta\mathbf{e}_\theta + r\ddot\theta\mathbf{e}_\theta - r\dot\theta^2\mathbf{e}_r + r\dot\theta\dot\phi\cos\theta\mathbf{e}_\phi \\
&\quad + \dot r\dot\phi\sin\theta\mathbf{e}_\phi + r\ddot\phi\sin\theta\mathbf{e}_\phi + r\dot\phi\dot\theta\cos\theta\mathbf{e}_\phi - r\dot\phi^2\sin\theta(\sin\theta\mathbf{e}_r + \cos\theta\mathbf{e}_\theta) \\
&= (\ddot r - r\dot\theta^2 - r\dot\phi^2\sin^2\theta)\mathbf{e}_r \\
&\quad + (r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta - r\dot\phi^2\sin\theta\cos\theta)\mathbf{e}_\theta \\
&\quad + (r\ddot\phi\sin\theta + 2\dot r\dot\phi\sin\theta + 2r\dot\theta\dot\phi\cos\theta)\mathbf{e}_\phi
\end{aligned} \tag{9}$$

一方ポテンシャル項を求めるためには，極座標による勾配 ∇ が必要になる．座標変換の式から

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r}\cdot\nabla = \mathbf{e}_r\cdot\nabla \tag{10}$$

同様に

$$\frac{\partial}{\partial\theta} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial\theta}\cdot\nabla = r\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial\theta}\cdot\nabla = r\mathbf{e}_\theta\cdot\nabla \tag{11}$$

$$\frac{\partial}{\partial\phi} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial\phi}\cdot\nabla = r\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial\phi}\cdot\nabla = r\sin\theta\mathbf{e}_\phi\cdot\nabla \tag{12}$$

よって，∇ の極座標基底の方向への成分が

$$\mathbf{e}_r\cdot\nabla = \frac{\partial}{\partial r}\ ,\quad \mathbf{e}_\theta\cdot\nabla = \frac{\partial}{r\partial\theta}\ ,\quad \mathbf{e}_\phi\cdot\nabla = \frac{\partial}{r\sin\theta\partial\phi} \tag{13}$$

とわかる．つまり，

$$\nabla = \mathbf{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta\frac{\partial}{r\partial\theta} + \mathbf{e}_\phi\frac{\partial}{r\sin\theta\partial\phi} \tag{14}$$

である．よって，ニュートン方程式

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -\nabla V \tag{15}$$

を，極座標の基底の成分に分解すると極座標表示のニュートン方程式が求まる．

$$\begin{aligned} m(\ddot r - r\dot\theta^2 - r\dot\phi^2\sin^2\theta) &= -\frac{\partial V}{\partial r} \\ m(r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta - r\dot\phi^2\sin\theta\cos\theta) &= -\frac{\partial V}{r\partial\theta} \\ m(r\ddot\phi\sin\theta + 2\dot r\dot\phi\sin\theta + 2r\dot\theta\dot\phi\cos\theta) &= -\frac{\partial V}{r\sin\theta\partial\phi} \end{aligned} \tag{16}$$

このように，ニュートン方程式を極座標で書くと非常に複雑になる．ラグランジアンを使った方法ではこの方程式が直接得られるわけなので，ラグランジュに感謝するべきだろう．２次元の場合と同様に ϕ 方向には角運動量が現れている．実際方程式は

$$\frac{d}{dt}(m\dot\phi r^2\sin^2\theta) = -\frac{\partial V}{\partial\phi} \tag{17}$$

と書くことができる．これは，ポテンシャル V が ϕ によらないならば（ϕ が循環座標ならば）

$$L_z = m\dot\phi r^2\sin^2\theta \tag{18}$$

が保存することを意味する．L_z は，z 軸周りの角運動量になっている．

3 次元極座標のラグランジアン

ポテンシャルが $V(r)$ で与えられているときの粒子のラグランジアンを極座標で表せ．ただし，極座標への座標変換は

$$x = r\sin\theta\cos\phi\ ,\quad y = r\sin\theta\sin\phi\ ,\quad z = r\cos\theta \tag{19}$$

で与えられる．

速度ベクトルは

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot r\mathbf{e}_r + r\dot\theta\mathbf{e}_\theta + r\dot\phi\sin\theta\mathbf{e}_\phi \tag{20}$$

で与えられ，基底ベクトルの直交性を使うと

$$\dot{\mathbf{x}}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\phi}^2 \sin^2\theta \tag{21}$$

よってラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\phi}^2 \sin^2\theta) - V(r) \tag{22}$$

運動方程式は

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\ddot{r} = -\frac{\partial V}{\partial r} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) \\ = \frac{\partial L}{\partial \theta} &= mr^2\dot{\phi}^2 \sin\theta\cos\theta \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} &= \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\phi}\sin^2\theta) \\ = \frac{\partial L}{\partial \theta} &= 0 \end{aligned} \tag{25}$$

$$\mathbf{L}^2 = (mr^2\dot{\theta})^2 + (mr^2\dot{\phi}\sin\theta)^2 = m^2r^4(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta) \tag{26}$$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{\mathbf{L}^2}{r^2} - V(r) \tag{27}$$

$$L = \frac{1}{2}m\Big(\frac{\dot{u}}{u^2}\Big)^2 + \frac{1}{2}\mathbf{L}^2u^2 - \alpha u \tag{28}$$

$$mr^2\dot{\phi} = L_z \tag{29}$$

$$r^2 d\phi = kdt \quad , \frac{1}{k}\dot{r} = \frac{1}{r^2}r' = -u' \quad , \tag{30}$$

$$\dot{r} = r'\dot{\phi} = kr'/r^2 = -ku' \tag{31}$$

$$L = (\frac{1}{2}mk^2u'^2 + \frac{1}{2}\mathbf{L}^2u^2 - \alpha u)\frac{d\phi}{u^2} \tag{32}$$