

### サイクロトロン運動

一定電磁場中を質量  $m$  の荷電粒子が運動している。

- 荷電粒子の質量を  $m$  , 電荷を  $e$  , ベクトルポテンシャルを  $\mathbf{A}$  , クーロンポテンシャルを  $\phi$  としてラグランジアンを書け。
- 一定磁場  $\mathbf{B}$  を与えるベクトルポテンシャルは

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{x} \quad (1)$$

で与えられることを示せ。

- $z$  軸方向に一定磁場  $B$  , さらに  $y$  軸方向に一定電場  $E$  がかかっているときのラグランジアンを書き運動方程式を求めよ。
- 粒子はどのような運動をするか？

1.

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 + e\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A} - e\phi \quad (2)$$

2. ベクトル積の公式

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \quad (3)$$

から,

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= (\nabla \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \\ &= \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\nabla \cdot \mathbf{B}) + (\mathbf{C} \cdot \nabla)\mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{C} \end{aligned} \quad (4)$$

を得る。これより,

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{2}\nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{x}) - (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{x}) = \mathbf{B} \quad (5)$$

1

3. 前問において,  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}$  とすると

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{x} = \frac{1}{2}B \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

また,  $y$  方向の一定電場に対応したクーロンポテンシャルは

$$\phi = Ey \quad (8)$$

<sup>1</sup>成分では

$$\epsilon_{ijk}\nabla_j(\epsilon_{klm}B_lC_m) = (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\nabla_j(B_lC_m) \quad (6)$$

である。ここでナブラは微分演算子なので、ベクトル積の公式を適用するとき常に左側においておかなければならない。この微分をライブニッツ則を使ってそれぞれに作用させると問題の公式を得る。

である．これらをラグランジアンに代入すると

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}eB(x\dot{y} - y\dot{x}) - eEy \quad (9)$$

運動方程式は

$$m\ddot{x} = eB\dot{y} \quad , \quad m\ddot{y} = -eB\dot{x} - eE \quad , \quad m\ddot{z} = 0 \quad (10)$$

4.  $z$  方向には単に等速度運動をしているだけなので，以下では  $x$ - $y$  平面上に投影した運動のみを議論する． $x$  方向の運動方程式を微分すると

$$m\dot{x} = eB\dot{y} \quad (11)$$

$y$  方向の方程式を使うと， $\dot{x}$  に関する方程式

$$\ddot{x} = -\left(\frac{eB}{m}\right)^2\left(\dot{x} + \frac{E}{B}\right) \quad (12)$$

を得ることができる．同様に

$$\ddot{y} = -\left(\frac{eB}{m}\right)^2\dot{y} \quad (13)$$

が成り立つ．よって

$$\dot{x} + \frac{E}{B} = C \sin(\omega t + \alpha) \quad , \quad (14)$$

という解を得る．ただし  $\omega = \frac{eB}{m}$  は角速度<sup>2</sup>．この解よりさらに

$$\dot{x} = C\omega \cos(\omega t + \alpha) = \omega\dot{y} \quad (15)$$

を得るので， $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$  の一般解が次のように求まる．

$$\dot{x} = C \sin(\omega t + \alpha) - \frac{E}{B} \quad , \quad \dot{y} = C \cos(\omega t + \alpha) \quad (16)$$

これを積分すると

$$x = -\frac{C}{\omega} \cos(\omega t + \alpha) - \frac{E}{B}t + x_0 \quad , \quad y = \frac{C}{\omega} \sin(\omega t + \alpha) + y_0 \quad (17)$$

これより荷電粒子は円運動をし，その中心は  $x$  軸方向に  $\frac{E}{B}$  で動いていることが分かる．よって粒子の軌跡はサイクロイドになる．

一様磁場中の荷電粒子の運動は，いろいろな場面で現れてくる基本的な問題の一つである．一様磁場を与えるベクトルポテンシャルは，ゲージ変換の分だけ任意性があるが，ここではベクトル積を使って，一様磁場が任意の方向を向いていてもよいような一般式をあたえた．この計算は解析力学というよりは，ベクトル演算の問題である．

具体的に運動を見るためには磁場の方向を  $z$  方向に選び， $y$  方向に一様電場をかけた．電場がない場合は荷電粒子は単に円運動(サイクロトロン運動)を行うのみである．ここに電場をかけると面白い現象が起こる．通常ならば電場をかけた方向に荷電粒子は動き始めるはずだが，磁場の存在のため方向が変わり結局粒子は  $x$  方向にドリフトしていくことになる．いわゆるホール効果が生じるのはこのためである．

<sup>2</sup>  $\frac{eB}{2\pi m}$  がサイクロトロン周波数である．