問題：

中心力問題と極座標表示の角運動量

極座標でのラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2) - U(r) \tag{1}$$

で与えられる．ただし，U は中心力ポテンシャル．

1. 極座標における，正準運動量とハミルトニアンを求めよ．
2. 角運動量ベクトル $\mathbf{L}$ の各成分を極座標で表示せよ．また，角運動量ベクトルの大きさの二乗 $\mathbf{L}^2$ を極座標で求めよ．
3. 角運動量の各成分のポアッソン括弧を求めよ．
4. ハミルトニアンを角運動量使って表し，角運動量が保存することを示せ．

1. 共役運動量はそれぞれ

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}\ ,\quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}\ ,\quad p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\sin^2\theta\dot{\phi} \tag{2}$$

よって運動量ベクトルは共役運動量を使うと

$$\begin{aligned}\mathbf{p} &= m\dot{\mathbf{x}} = m\dot{r}\mathbf{e}_r + mr\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + mr\sin\theta\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi \\ &= p_r\mathbf{e}_R + \frac{1}{r}p_\theta\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}p_\phi\mathbf{e}_\phi\end{aligned} \tag{3}$$

と書ける．ハミルトニアンは

$$\begin{aligned}H &= \dot{r}p_r + \dot{\theta}p_\theta + \dot{\phi}p_\phi - L \\ &= \frac{1}{m}p_r^2 + \frac{1}{mr^2}p_\theta^2 + \frac{1}{mr^2\sin^2\theta}p_\phi^2 - L \\ &= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2\sin^2\theta} + U\end{aligned} \tag{4}$$

となる．

2. 極座標における基底ベクトルの外積は

$$\mathbf{e}_r\times\mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_\phi\ ,\quad \mathbf{e}_\theta\times\mathbf{e}_\phi = \mathbf{e}_r\ ,\quad \mathbf{e}_\phi\times\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\theta \tag{5}$$

で与えられる．位置ベクトルは，これらの基底を使うと $\mathbf{x} = r\mathbf{e}$ であることを使うと

$$\begin{aligned}\mathbf{L} &= m\mathbf{x}\times\dot{\mathbf{x}} = mr\mathbf{e}_r\times(\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\dot{\phi}\sin\theta\mathbf{e}_\phi) \\ &= mr^2(\dot{\theta}\mathbf{e}_\phi - \dot{\phi}\sin\theta\mathbf{e}_\theta) \\ &= p_\theta\mathbf{e}_\phi - \frac{p_\phi}{\sin\theta}\mathbf{e}_\theta\end{aligned} \tag{6}$$

成分で書くと

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = p_\theta\begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{p_\phi}{\sin\theta}\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -p_\theta \sin\phi - p_\phi \cot\theta \cos\phi \\ p_\theta \cos\phi - p_\phi \cot\theta \sin\phi \\ p_\phi \end{pmatrix} \tag{7}$$

角運動量ベクトルの大きさは

$$\mathbf{L}^2 = p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2\theta} \tag{8}$$

3. 極座標におけるポアッソン括弧は

$$\{r, p_r\} = 1 \ , \quad \{\theta, p_\theta\} = 1 \ , \quad \{\phi, p_\phi\} = 1 \tag{9}$$

でそのほかの組み合わせは0になる．角運動量の成分のポアッソン括弧のうち0にならないものは3つある．そのうち L_z を含むものは

$$\begin{aligned} \{L_z, L_x\} &= \{p_\phi, -p_\theta \sin\phi - p_\phi \cot\theta\cos\phi\} = -\frac{\partial}{\partial\phi}(-p_\theta\sin\phi - p_\phi\cot\theta\cos\phi) \\ &= p_\theta\cos\phi - p_\phi\cot\theta\sin\phi = L_y \qquad (10) \\ \{L_z, L_y\} &= \{p_\phi, p_\theta\cos\phi - p_\phi\cot\theta\sin\phi\} \\ &= p_\theta\sin\phi + p_\phi\cot\theta\cos\phi = -L_x \qquad (11) \end{aligned}$$

のように ϕ 微分をするだけで求まる．最後に

$$\begin{aligned} \{L_x, L_y\} &= \{-p_\theta\sin\phi - p_\phi\cot\theta\cos\phi, p_\theta\cos\phi - p_\phi\cot\theta\sin\phi\} \\ &= \{p_\theta\sin\phi, p_\phi\cot\theta\sin\phi\} - \{p_\phi\cot\theta\cos\phi, p_\theta\cos\phi\} \\ &\qquad + \{p_\phi\cot\theta\cos\phi, p_\phi\cot\theta\sin\phi\} \qquad (12) \end{aligned}$$

がある．ここに現れるポアッソン括弧の計算は少し複雑だが，0にならない部分はそれぞれ次のような項である．

$$\begin{aligned} \{p_\theta\sin\phi, p_\phi\cot\theta\sin\phi\} &= (\frac{\partial}{\partial\phi}p_\theta\sin\phi)(\frac{\partial}{\partial p_\phi}p_\phi\cot\theta\sin\phi) - (\frac{\partial}{\partial p_\theta}p_\theta\sin\phi)(\frac{\partial}{\partial\theta}p_\phi\cot\theta\sin\phi) \\ &= (p_\theta\cot\theta\sin\phi\cos\phi) - (p_\phi\frac{-1}{\sin^2\theta}\sin^2\phi) \qquad (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{p_\theta\cos\phi, p_\phi\cot\theta\cos\phi\} &= (\frac{\partial}{\partial\phi}p_\theta\cos\phi)(\frac{\partial}{\partial p_\phi}p_\phi\cot\theta\cos\phi) - (\frac{\partial}{\partial p_\theta}p_\theta\cos\phi)(\frac{\partial}{\partial\theta}p_\phi\cot\theta\cos\phi) \\ &= -(p_\theta\cot\theta\sin\phi\cos\phi) - (p_\phi\frac{-1}{\sin^2\theta}\cos^2\phi) \qquad (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{p_\phi\cot\theta\cos\phi, p_\phi\cot\theta\sin\phi\} &= \frac{\partial}{\partial\phi}(p_\phi\cot\theta\cos\phi)\frac{\partial}{\partial p_\phi}(p_\phi\cot\theta\sin\phi) \\ &\quad -\frac{\partial}{\partial p_\phi}(p_\phi\cot\theta\cos\phi)\frac{\partial}{\partial\phi}(p_\phi\cot\theta\sin\phi) \\ &= -p_\phi\cot^2\theta\sin^2\phi - \cot^2\theta\cos^2\phi \\ &= -p_\phi\cot^2\theta \qquad (15) \end{aligned}$$

よって

$$\{L_x, L_y\} = \frac{p_\phi}{\sin^2\theta} - p_\phi\cot^2\theta = p_\phi = L_z \tag{16}$$

このようにして，角運動量間のポアッソン括弧

$$\{L_x, L_y\} = L_z \ , \quad \{L_z, L_x\} = L_y \ , \quad \{L_y, L_z\} = L_z \tag{17}$$

が求まった．

4. ハミルトニアンは

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{1}{2mr^2}(p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2\theta}) + V = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{\mathbf{L}^2}{2mr^2} + V \tag{18}$$

と書ける．角運動量は変数 r, p_r を含まないので，$\mathbf{L}$ の各成分と動径方向の運動量と中心力ポテンシャル $U(r)$ とのポアッソン括弧は必然的に 0 になる．問題は $\mathbf{L}^2$ の項だけだが，例えば $\mathbf{L}^2$ と L_x とのポアッソン括弧は

$$\{\mathbf{L}^2, L_x\} = \{L_y^2 + L_z^2, L_x\} = 2L_y\{L_y, L_x\} + 2L_z\{L_z, L_x\} = 2L_y(-L_z) + 2L_zL_y = 0 \tag{19}$$

のように 0 になる．同様に L_y, L_z とのポアッソン括弧も 0 になるので

$$\{\mathbf{L}^2, \mathbf{L}\} = 0 \tag{20}$$

よって

$$\{H, \mathbf{L}\} = 0 \tag{21}$$

このように，角運動量の各成分とハミルトニアンとのポアッソン括弧が 0 になる．つまり，中心力の下での運動では角運動量が保存することがわかる．

ハミルトニアンはラグランジアンのルジャンドル変換として求まる．注意してほしいのはハミルトニアンの独立変数は座標とその共役運動量である．ハミルトニアンとして，速度を使ったエネルギーの式を書く学生がいるがこれは間違いである．問 2 の角運動量の極座標表示というのは，量子力学で頻繁に使われる角運動演算子の古典力学において対応する量である．それぞれの共役運動量を量子化条件を使って微分演算子で置き換えると量子力学で得られる演算子になる．ただし $\mathbf{L}^2$ の計算では量子化に伴う演算子の順序の問題から，$\hbar$ 程度のずれが生じる．問 3 の角運動量成分のポアッソン括弧はよく知られたものである．この関係はデカルト座標で計算した方が簡単で同じ結果を得ることができるが，ここではあえて極座標で計算することを要求した．このことは，ポアッソン括弧が座標系の取り方によらないことの良い検証である．

正準理論では，ハミルトニアンとのポアッソン括弧が 0 になる量は保存量である．問 4 の計算から $\mathbf{L}^2$ が保存量であるのでハミルトニアンでは定数と思ってよく，中心力の下での運動は基本的に動径座標 r に関する方程式を解けばよいことが分かる．